x_0

Chapitre VI : mouvement à force centr

VI - 1 Introduction :

C'est le mvt d'un pt materiel M q
est soumis à une force (ou résultante
des forces) $\vec{F}$ passant par un pt fixe
appelé centre de force

$\Rightarrow \vec{F}$ est colinéaire au vecteur position
le pt O est le centre de la force

$\vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

aussi, on a : $\vec{OM} \wedge m\vec{\gamma} = \vec{0}$

$\vec{\gamma}$ est colinéaire à $\vec{OM}$.

VI - 2 Conservation du moment ciné et conséquences :

soit un pt M en mvt dans un réf. galiléen, soumis à une force centrale $\vec{F}$.

Th. de moment cinetique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0(M)}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{\sigma}_0(M)$ est un vecteur constant.

Cette conservation permet de donner comm
conséquences :

- le pt M effectue une trajectoire plan

En effet : $\vec{\sigma}_0(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p}(M) = \vec{L}$: vecteur constant

Le vecteur $\vec{OM}$ est constamment perpendicu
M décrit alors une trajectoire situé dans le
plan ⊥ à $\vec{L}$ On dit que la trajectoir
est plane

2ème co

Le mvt s'effectue suivant la loi des ai



le rayon vecteur $\vec{OM}$ balaye des aires identiques pendant des temps égaux. En effet
On prend soit une base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$
t.q: $\vec{OM} = r\vec{e_r}$

$$\vec{V}(M) = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma_0}(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M)$$

$$= m r^2 \dot{\theta}\,\vec{k}$$

or : $\vec{\sigma_0}(M)$: vecteur cst $\Rightarrow \vec{\sigma_0}(M) = \sigma_0 \cdot \vec{k}$

$$\Rightarrow m r^2 \dot{\theta} = \sigma_0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \frac{\sigma_0}{m}$$

En choisissant une cste C t.q :

$$C = \frac{\sigma_0}{m}$$

$$\Rightarrow r^2\dot{\theta} = C$$

$$r^2 d\theta = C.dt$$

$$r.(r\,d\theta) = C.dt$$

$$2\,ds = C.dt$$

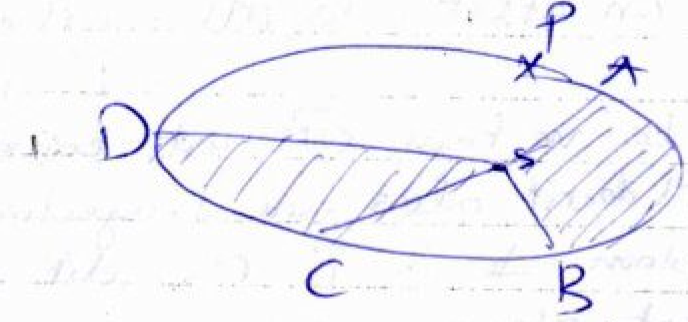
où ds est l'aire élémentaire balayé par le rayon vecteur pendant dt

$$\Rightarrow ds = \frac{C}{2}dt$$

$$ds = \frac{r^2 d\theta}{2}$$

C'est la loi des aires et C est appelée la constante des aires.

Explication :



Le mvt de la planète P autour du soleil s'effectue selon la loi des aires.

⇒ si P met la même durée pour aller de A à B et de C à D.

⇒ Les zones hachurées sont de même aires.

VI - 3 Formules de Binet :

i/. 1ère formule de Binet :

soit M un pt materiel, en mvt à force centrale.

$\vec{V}(M) = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$\Rightarrow \vec{V}^2(M) = V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$

$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}$

$r^2\dot{\theta} = C$

Or $\frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right)$

$\Rightarrow \dot{r} = -C \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$

On posera : $u = \frac{1}{r} \Rightarrow \dot{r} = -C \cdot \frac{du}{d\theta}$

$(r\dot{\theta})^2 = r^2 \cdot \left(\frac{C}{r^2}\right)^2 = \frac{C^2}{r^2} = C^2 \cdot u^2$

$\Rightarrow V^2 = C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right)$: c'est la 1ère formule de Binet

ii/. 2ème formule de Binet :

En c.p : $\vec{\gamma}(M) = \left(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\right)\vec{e_r} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{\gamma_\theta}\vec{e_\theta}$

Or : $\vec{\gamma} \,//\, \vec{OM} \Rightarrow \gamma_\theta = 0$

$\Rightarrow \vec{\gamma}(M) = \gamma_r(M)\,\vec{e_r}$

ou $\gamma_r(M) = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$

$r(\dot{\theta})^2 = r\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 = \frac{C^2}{r^3} = C^2 \cdot u^3 \quad \left(u = \frac{1}{r}\right)$

$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$

$= \frac{C}{r^2} \cdot \frac{d}{d\theta}\left(-C\frac{du}{d\theta}\right) \quad \left(\dot{r} = -C \cdot \frac{du}{d\theta}\right)$

$\ddot{r} = -C^2 \cdot u^2 \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2}$

$\Rightarrow \gamma_r(M) = -C^2 u^2 \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$: C'est la 2ème formule de Binet.

si la résultante des forces appliquée à un pt M est une force centrale alors sa vitesse et son accélération de M dans R vérifient les deux formules de Binet.

retrouver l'expression de la cste des aires C en utilisant le fait que $\gamma_\theta = 0$

VI - 4 : Etude dynamique d'un mvt à force centrale.

On s'intéresse dans cette partie aux forces proportionnelles à $\frac{1}{r^2}$ t.q :

$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e_r}$

soit M soumis à $\vec{F}$ dans un réf. galiléen - $\Rightarrow$ mvt à force centrale.

a) - Equation de la trajectoire :

* P.F.D : $m\vec{\gamma} = \vec{F}$

$m\gamma_r = -\frac{K}{r^2}$

Or : $\gamma_r(M) = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$

$\Rightarrow -mC^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = -\frac{K}{r^2} = -Ku^2$

$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{mC^2}$

C'est l'équation différentielle du mvt

$S_g = S_{ssm} + S_p$

$u_{ssm} = A_1\cos\theta + A_2\sin\theta$

ou aussi : $u_{ssm} = A\cos(\theta + \varphi)$



$u_p = ?$ $\Rightarrow u_p = \frac{k}{mC^2}$

$u = A\cos(\theta + \varphi) + \frac{k}{mC^2}$

On pose : $P = \frac{mC^2}{k}$

$u = A\cos(\theta+\varphi) + \frac{1}{P}$

$\Rightarrow u = \frac{A.P\cos(\theta+\varphi) + 1}{P} = \frac{1}{r}$

$\Rightarrow r = \frac{P}{1 + A.P\cos(\theta+\varphi)}$

On posera : $e = A.P$

$$r = \frac{P}{1 + e\cos(\theta+\varphi)} \qquad (r = f(\theta))$$

* En choisissant, $\varphi = 0$ càd que l'origine des angles est θ.

$\Rightarrow r = \frac{P}{1 + e\cos\theta}$: c'est l'équation d'une conique

Propriétés des coniques :

Définition : C'est le lieu des pts M t.q le rapport des distances par rapport à un pt appelé foyer et par rapport à un axe (D) appelé directrice est cst.

$$\frac{MF}{MH} = e = cste$$

e c'est l'excentricité de la conique.

Eq. polaire de la conique :

$r = e.MH$

$= e(r\cos\theta + h)$



$r = r\,e\cos\theta + eh$

$r(1 - e\cos\theta) = eh$

On pose : $P = e.h$

$\Leftrightarrow r = \dfrac{P}{1 - e\cos\theta}$: Equation polaire de la conique

Equation cartésienne de la conique :

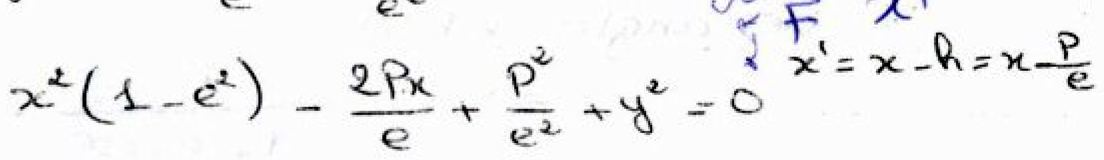
$MF = e.MH$

$\Rightarrow (MF)^2 = e^2.(MH)^2$

$(y^2 + x'^2) = e^2 x^2$

$y^2 + (x - \frac{P}{e})^2 = e^2 x^2$

$y^2 + x^2 - \frac{2P}{e}x + \frac{P^2}{e^2} = e^2 x^2$



$x^2(1-e^2) - \frac{2Px}{e} + \frac{P^2}{e^2} + y^2 = 0$

$x' = x - h = x - \frac{P}{e}$

On distingue les cas suivants :

$e = 1$: $y^2 - 2Px + P^2 = 0$

$y^2 - 2P(x - \frac{P}{2}) = 0$

On posera : $\begin{cases} X = x - P/2 \\ Y = y \end{cases}$

$Y^2 = 2PX$: c'est l'equation d'un parabole.

$\Rightarrow$ si $e = 1 \Rightarrow$ la conique est une parabole

Foyer de la parabole.

Cas où $e \neq 1$

On peut écrire : $\dfrac{p^2}{e^2} = \dfrac{p^2}{1-e^2} \times \dfrac{1-e^2}{e^2}$

$$= \frac{p^2}{(1-e^2)} \cdot \left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$$

$$x^2(1-e^2) - \frac{2Px}{e} + \frac{p^2}{e^2} + y^2 = 0$$

$$x^2(1-e^2) - \frac{2p}{e}x + \frac{p^2}{e^2(1-e^2)} - \frac{p^2}{1-e^2} + y^2 = 0$$

$$(1-e^2)\left(x^2 - \frac{2p}{e(1-e^2)}x + \frac{p^2}{e^2(1-e^2)^2}\right) + y^2 = \frac{p^2}{1-e^2}$$

$$(1-e^2)\left(x - \frac{p}{e(1-e^2)}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-e^2}$$

On pose : $\begin{cases} X = x - \dfrac{p}{e(1-e^2)} \\ Y = y \end{cases}$

$$\left[(1-e^2)X^2 + Y^2 = \frac{p^2}{1-e^2}\right] \times \left(\frac{1-e^2}{p^2}\right)$$

$$\frac{(1-e^2)^2}{p^2} \cdot X^2 + Y^2\left(\frac{1-e^2}{p^2}\right) = 1$$

On pose : $a^2 = \dfrac{p^2}{(1-e^2)^2}$

$b^2 = \dfrac{p^2}{1-e^2}$ si $e < 1$

ou $b^2 = -\dfrac{p^2}{1-e^2}$ si $e > 1$

$\Rightarrow$ si $0 < e < 1$: $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$

La conique est une ellipse.

Cas limite : $e = 0$

$\Rightarrow X^2 + Y^2 = p^2$ $(a^2 = b^2 = p^2)$

la conique est ici un cercle.

si $e > 1$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

C'est le cas d'une hyperbole.

shéma de l'ellipse :

a : demi grand axe de l'ellipse

b : demi petit axe

$OF = OF'$

F et F' sont les deux foyers de l'ellipse

$y = -\frac{b}{a}x$ $y = \frac{b}{a}x$

Asymptote Asymptote

$OF = OF'$ $e > 1$

F et F' st les 2 foyers de l'hyperbole

b) - Energie mécanique :

* $E_m = E_c + E_p$

$\Rightarrow E_p = ?$

On sait que : $dE_p = -dW(\vec{F})$

$$dE_p = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$
$$= \frac{k}{r^2} \vec{e_r} \cdot dr\, \vec{e_r}$$
$$= \frac{k}{r^2} \cdot dr$$

$\Rightarrow E_p = \frac{k}{r^2} + \text{cste}$

$E_p(\infty) = 0 \Rightarrow \text{cste} = 0$

$E_p = -\frac{k}{r}$

$\Rightarrow E_p = -\frac{k}{p}(1 + e\cos\theta)$

$+ \; E_c = \frac{1}{2} m^P v^2$

le mvt est central $\Rightarrow$ la vitesse vérifie la 1ère formule de Binet.

$$V^2 = C^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \right)$$

or : $u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{2p}$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{-e\sin\theta}{p}\right)^2$$

$$V^2 = C^2 \left(\frac{1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta}{p^2} + \frac{e^2\sin^2\theta}{p^2} \right)$$

$$V^2 = \frac{C^2}{p^2}(1 + e^2 + 2e\cos\theta)$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{mC^2}{p^2}(1 + e^2 + 2e\cos\theta) - \frac{k}{p}(1 + e\cos\theta)$$

or ; $p = \frac{mC^2}{k}$

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{k}{p}\left(1 + e^2 + 2e\cos\theta - 2 - 2e\cos\theta\right)$$

$\Rightarrow E_m = \frac{k}{2p}(e^2 - 1) = -\frac{k}{2}\left(\frac{1 - e^2}{p}\right)$

si $e = 1 \Leftrightarrow$ Il s'agit d'une parabole

$E_m = 0$

si $e < 1 \Leftrightarrow$ Il s'agit d'une ellipse

$E_m < 0$

si $e > 1 \Leftrightarrow$ Il s'agit d'une hyperbole $E_m > 0$

c/- Cas particulier : Mvt elliptique

$$E_m = -\frac{k}{2} \cdot \frac{(1-e^2)}{p}$$

Or, on a vu : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \Rightarrow a = \frac{p}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow E_m = -\frac{k}{2a}$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse

C'est le temps mis pour effectuer un tour de la trajectoire elliptique. Pendant un tour, le rayon vecteur balaye l'aire de l'ellipse.

$S = \pi . a . b$ (aire balayée par l'ellipse pendant un tour)

* selon la loi des aires :

$$S = \frac{C}{2} . T$$

$\Rightarrow \pi^2 a^2 b^2 = \frac{C^2}{4} . T^2$ (T est la période de l'ellipse)

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \\ b^2 = \frac{p^2}{1-e^2} \\ p = \frac{mC^2}{k} \end{array}\right\} b^2 = (1-e^2) . a^2$$



$4\pi^2 a^4 (1-e^2) = C^2 T^2$

$4\pi^2 a^4 \cdot \frac{P}{a} = C^2 T^2$

$4\pi^2 a^3 \cdot \frac{m C^2}{K} = C^2 \cdot T^2$

$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{K} \cdot a^3$: la 3ème loi de Kepler (à énoncer après)

d) - Mvt des planètes (Loi de Newton) :

i/ - Définition :

Dans le domaine de la gravitation, une masse m_1 placé en un pt O est une masse m_2 placé en un pt M subit de la part de O (m_1) la force :

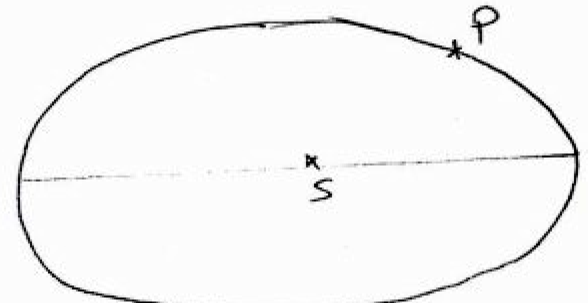
$\vec{F} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e_r}$

$\vec{r} = r \cdot \vec{e_r}$

- la loi de Newton est basée sur les lois de Kepler qui sont basées sur des observation experimentales.

ii/ - Enoncé des lois de Kepler :

1er loi : la trajectoire effectuée par une planète dans son mvt autour du soleil est une ellipse dont le soleil est l'un de ses foyers.



2ème loi : la trajectoire vecteur issue du soleil passe par la planète balaye des aires identiques pendant des temps égaux (la loi des aires).

3ème loi : le carré de la période de révolution autour du soleil est proportionnelle au cube de demi grand axe de l'ellipse.

remarque : Dans le cas de forces gravitationnelles (Newton

$K = G.m.M.$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} . a^3$$

$$= \frac{4\pi^2 m}{G.m.M} . a^3$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

s'il s'agit des planètes autour du soleil ($M = M_s$ et m=

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_s} \quad \forall \text{ la planète}$$

Conclusion : Cette équation peut être utiliser pour détermi la masse du soleil. Aussi, s'il s'agit des satellites aut de la terre.

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T} \quad \forall \text{ le satellite}$$

$\Rightarrow$ utile dans la détermination de la masse de la terre.

iii/- Vitesses cosmiques :

a- 1ère vitesse cosmique :

c'est la vitesse d'un corps décrivant une orbite circula autour d'une grande masse (satellite autour de la te

$E_m = E_c + E_p$

$$= \frac{1}{2} m V_c^2 - \frac{K}{a} = -\frac{k}{2p}(1 - e^2)$$

Trajectoire circulaire : de rayon a

$$\frac{1}{2} m V_c^2 - \frac{k}{a} = -\frac{k}{2a}$$

$$\frac{1}{2} m V_c^2 = \frac{k}{2a} = \frac{G.m M}{2a}$$

$$V_c = \sqrt{\frac{G.M}{a}}$$

s'il s'agit des satellites aux basses altitudes (h)

$a = R_T + h \simeq R_T$

$$V_c = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T}}$$

si aussi la vitesse de satellisation minimale (V_{sm}) qu'on doit communiquer à un satellite lors de son lancement pour qu'il effectue une trajectoire circula autour de la terre.

b/- Vitesse de libération :

c'est la vitesse communiquée à un corps pour qu'il s'échappe de l'attraction vis à vis d'une grande masse (ex : satellite et la terre) et effectuant une trajectoi parabolique.

Pour une parabole : $E_m = 0$

$E_m(\text{corps}) = \frac{1}{2} m V_l^2 - \frac{k}{r_0} = 0$

$\frac{1}{2} . m V_l^2 = \frac{G.m.M}{r_0}$ $(a = r_0)$

$V_l = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ (si le pt de lancement d'un satell et le sol $r_0 = R_T$

Remarq

\- Comment la trajectoire d'un satellite autour de la terre en faisant variée sa vitesse de lancement !

si $V_0 < V_{sm}$: le satellite retombe sur le sol en eff une trajectoire parabolique.

si $V_0 = V_{sm}$: le satellite décrira une orbite circulair autour de la terre.

si $V_{sm} < V_0 < V_\ell$: le satellite décrira une trajectoire elliptique.

si $V_0 = V_\ell$ = le satellite décrira une trajectoire parabol

si $V_0 \gg V_\ell$: le satellite décrira une trajectoire hyperbolique.

Dans les deux derniers cas les trajectoires ne sont plus fermées et le satellite s'éloigne indéfiniment de la terre.




ETUSUP.com